

שאלון 582

פרק 28

פתרון בידאו של בחינות 2014

1	מועד חורף
4	קיץ מועד א
7	קיץ מועד ב
10	קיץ מועד ג

בגרות חורף 2014:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.
(1) הנקודות $C(x_1, y_1)$ ו- $D(x_2, y_2)$ נמצאות ברביע הראשון על פי הפרבולה $y^2 = 4x$.

א. (1) הראה כי שיפוע המיתר CD הוא $m = \frac{4}{y_2 + y_1}$.

(2) הנקודה $(x, 3)$ היא אמצע המיתר CD. מצא את m .

ב. נתון כי מרחק כל נקודה על הפרבולה הנתונה מהישר $x = a$ שווה

למרחקה מהנקודה $(1, 0)$. מרחק הנקודה C מהישר $x = 2a$ הוא 6.

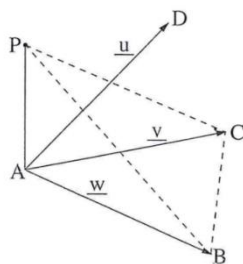
(1) מהו הערך של a ? נמק.

(2) מצא את משוואת הישר CD.

(2) נתונים הווקטורים: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{w}$ (ראה ציור).

נתון: $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle DAC = 60^\circ$, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 2$.

א. האם ייתכן ששלושת הווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ נמצאים במישור אחד? נמק.



נתון גם כי הווקטור $\overrightarrow{AP} = a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w}$

מאונך למישור ABC, a ו- b הם פרמטרים (ראה ציור).

ב. מצא את האורך של $\overrightarrow{AP}$ (ערך מספרי).

ג. היעזר בחישובים טריגונומטריים ומצא את הזווית

בין המישור PCB ובין המישור ABC.

(3) המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z מקיים $|z - 12 - 5i| = 7$.

המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים $w + x + iy$ מקיים: $\arg(w) = 45^\circ$.

($\arg(w)$ היא הזווית בהצגה הקוטבית של w). המקום הגאומטרי של המספרים

המרוכבים w חותך את המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z בנקודות B ו- C.

א. סרטט באותה מערכת צירים סקיצות של שני המקומות הגאומטריים.

ב. הנקודות B ו- C מייצגות במישור גאוס של המספרים

המרוכבים z_1 ו- z_2 בהתאימה. מצא את $\arg(z_1 \cdot z_2)$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\sqrt{x}}$.

א. מצא:

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $y = 2 \cdot f'(x)$,

והראה כי נקודה זו נמצאת על גרף הפונקציה $y = f(x^2)$, $x > 0$.

ג. הפונקציות $y = 2 \cdot f'(x)$ ו- $y = f(x^2)$ נפגשות בנקודה אחת בלבד (הנקודה שמצאת בסעיף ב).

ד. השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי פונקציות אלה ועל ידי הישר

$x = a$, $a > 1$, שווה ל- $8e - 2 \cdot f(a)$. מצא את הערך של a .

תוכל להשאיר $\ln$ בתשובתך.

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. קבלן מציע דירות למכירה בתשלומים חודשיים. בתאריך 1/1/2012

התשלום החודשי עבור הדירה היה 5900 ₪, ובכל חודש התשלום גדל ב-0.2%.

המשכורת החודשית של רן בתאריך 1/1/2012 הייתה 8000 ₪, ובכל חודש היא

גדלה ב-1.2%. רן יכול להתחיל לשלם עבור הדירה רק אחרי התאריך שבו התשלום

החודשי עבור הדירה יהיה 60% ממשכורתו החודשית. כעבור כמה חודשים שלמים

מהתאריך 1/1/2012 יוכל רן להתחיל לשלם עבור הדירה?

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = x^n \cdot \ln(x^n)$. הפרמטר n הוא מספר טבעי וזוגי.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) קבע אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית. נמק.

(3) הראה כי יש רק אחד המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ ומקביל

לציר ה- x , ומצא את משוואתו.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

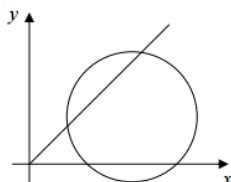
תשובות סופיות:

(1) א. i. הוכחה א. ii. $\frac{2}{3}$ ב. i. -1 ב. ii. $CD: y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

(2) א. לא ייתכן ששלושת הווקטורים נמצאים במישור אחד.

ב. 4.899 ג. 70.53°

(3) א. סקיצה בצד. ב. 90°



(4) א. i. $x \geq 0$ א. ii. עלייה: $x > 1$, ירידה: $0 < x < 1$

ב. $(1, 2e)$ והוכחה ג. 2.0986

(5) א. 21 חודשים ב. i. $x \neq 0$ ב. ii. זוגית

ב. iii. $y = -\frac{1}{e}$

בגרות קיץ 2014 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

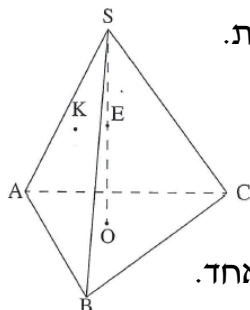
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי של הנקודות, שהמרחק של כל אחת מהן מהישר: $-5x+12y+13=0$ הוא 3.

ב. מהי משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים בשתי נקודות למקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א?

ג. האם ציר ה- y יכול להשיק בנקודה $(0,0)$ לאחד המעגלים שבסעיף ב? נמק.



(2) נתונה פירמידה ישרה SABC, שבסיסה ABC הוא משולש שווה-צלעות.

גובה הפירמידה הוא SO. נקודה E היא אמצע SO (ראה ציור).

נקודה F מקיימת: $\overrightarrow{SF} = t \cdot \overrightarrow{SC}$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{OS} = \underline{w}$.

נקודה K מקיימת: $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{9}\underline{u} - \frac{2}{9}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$.

מצא את הערך של t , אם ידוע שהנקודות F, K ו-E נמצאות על ישר אחד.

(3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. סרטט במישור גאוס סקיצה של המקום הגאומטרי של המספרים

המרוכבים z המקיימים: $|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$. נמק.

ב. המקום הגאומטרי שבסעיף א נפגש עם ציר ה- x בנקודה z_1 .

נתונה הנקודה $M(-3, \sqrt{3})$. נסמן ב-O את ראשית הצירים.

המספר המרוכב z_2 נמצא על המקום הגאומטרי שבסעיף א

כך שהמרוכב $z_1 M z_2 O$ הוא דלתון. מצא את הזווית החדה של הדלתון.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את הארגומנט של z_2 .

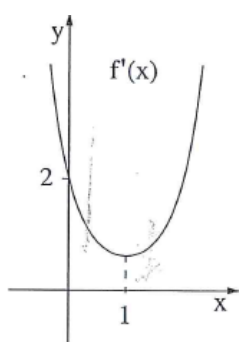
- ii. מבין המספרים המרוכבים z שבסעיף א, מהו המספר שיש לו הארגומנט הגדול ביותר? מהו ארגומנט זה?

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

- 4) בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת לכל x .



- א. על פי הגרף של $f'(x)$ מצא תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x . נמק. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בחלקו השלילי.
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ג. נתון גם: $f(x) = (x-a)e^{0.5x^2-x}$, a הוא פרמטר. היעזר בנתונים בגרף של $f'(x)$ וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים.

- 5) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4(x^2 + 4x + c)$, c הוא פרמטר.

נתון כי לפונקציה יש אסימפטוטה שמשוואתה $x = -2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

- מצא את ערך הפרמטר c .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

- נתונה הפונקציה $g(x) = -|f(x)|$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

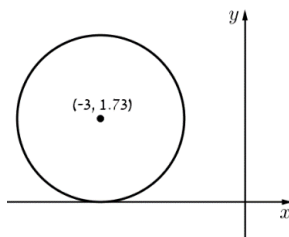
- עבור אילו ערכים של k יש למשוואה $g(x) = k$ שני פתרונות בלבד?

תשובות סופיות:

(1) א. $-5x+12y-26=0$, $-5x+12y+52=0$ ב. $-5x+12y+13=0$ ג. לא.

(2) $t = \frac{1}{3}$

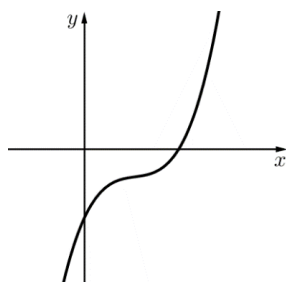
(3) א. להלן סקיצה: ב. 60° ג. (i) 120°



ג. (ii) $z = -3$, הארגומנט -180° .

(4) א. קעירות כלפי מעלה- $x > 1$, כלפי מטה- $x < 1$. ב. להלן סקיצה:

ג. $1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$



א. (ii) $x \neq -2$

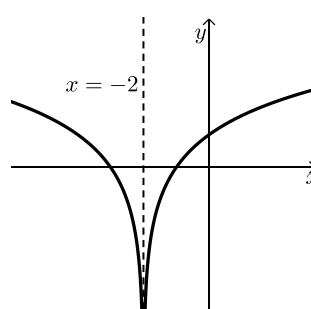
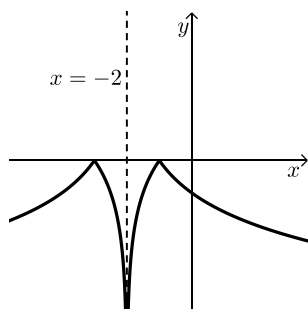
(5) א. (i) $c = 4$

א. (iv) $(-3,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$

א. (iii) עלייה: $x > -2$, ירידה: $x < -2$

ב. (i) להלן סקיצה: ב. (ii) $k = 0$

א. (v) להלן סקיצה:



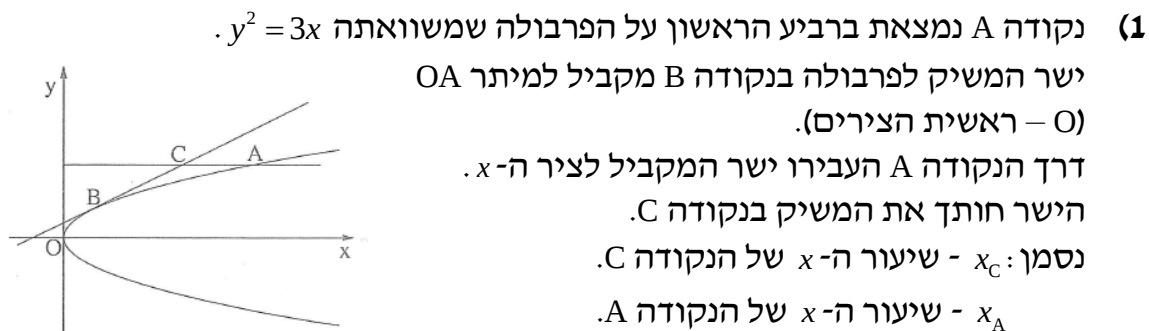
בגרות קיץ 2014 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



היעזר בעובדה שהנקודה C נמצאת על פרבולה שמשוואתה $y^2 = 4x$,
 וענה על הסעיפים א, ב ו-ג.

- הבע באמצעות x_C את x_A .
- הבע באמצעות x_C את השיפוע של הישר OA.
- נתון גם כי שטח המשולש BCA הוא 0.5625.
 מצא את השיעורים של הנקודה C.

(2) במשולש ABC, גובה המשולש לצלע AB הוא CD. נסמן: $\overrightarrow{CA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{CB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = t \cdot \overrightarrow{AB}$.

נתון: $\cos \angle ACB = \frac{3}{4}$, $|\overrightarrow{CB}| = 2$, $|\overrightarrow{CA}| = 1$.

- חשב את הערך של t בעזרת חשבון וקטורים.
- סרטט את המשולש ABC ואת הגובה CD כך שהסרטוט יתאים לערך של t שחישבת בסעיף א.
- נקודה E נמצאת על הצלע BC (בין B ל-C).

נתון גם: $\frac{CE}{BE} = \frac{3}{5}$. נסמן: $\overrightarrow{CD} = \underline{h}$.

הבע את $\overrightarrow{AE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{h}$ בלבד.

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה : $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$, z הוא מספר מרוכב.

ב. האם שלושה מן הפתרונות שמצאת בסעיף א נמצאים על המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים w השונים מ-0 ומקיימים : $107^\circ < \arg(w) < 253^\circ$? נמק.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-2(x+3)}{\sqrt{e^{ax}}}$, a הוא פרמטר.

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ii. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

היעזר בנתונים הרשומים בגרף, ומצא :

i. ערך מספרי עבור שיעור ה- x וערך מספרי עבור

שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

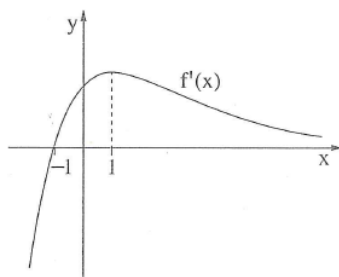
וקבע את סוגה.

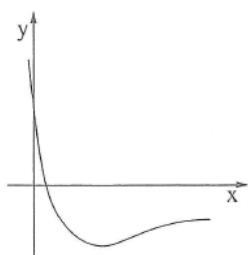
ii. ערך מספרי עבור שיעור ה- x וערך מספרי עבור

שיעור ה- y של נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

iii. את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.





5 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3-9\ln(3x+1)}{3x+1}$ (ראה ציור).

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את נקודת החיתוך של גרף

הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ii. השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה, של ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים $x = a$ ו- $x = \frac{e-1}{3}$ הוא 3.5. נתון כי $a > \frac{e-1}{3}$.

היעזר בנגזרת של $y = \ln^2(3x+1)$, ומצא את a .

iii. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד בנקודה שבה $x = \frac{e^{4/3}-1}{3}$.

מצא עבור אילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ שלילית וגם פונקציית

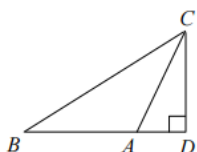
הנגזרת $f'(x)$ שלילית.

תשובות סופיות:

1. א. $x_A = \frac{4}{3}x_C$ ב. $1.5 \cdot \frac{\sqrt{x_C}}{x_C}$ ג. $C(2.25, 3)$

2. א. $t = -0.25$ ב. להלן סקיצה:

ג. $\overrightarrow{AE} = 0.875\vec{u} - 1.5\vec{h}$

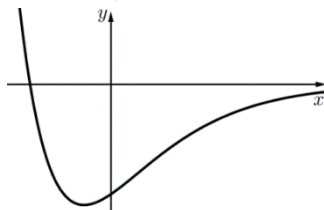


3. א. $-2, -0.2-0.6i, 0, -0.2+0.6i$ ב. כן.

4. א. (i). כל x . א. (ii). $(0, -6), (-3, 0)$ ב. (i). $\min(-1, -6.59)$

ב. (ii). $(1, -4.85)$ ב. (iii). קעורה מעלה: $x < 1$, קעורה מטה: $x > 1$.

ג. להלן סקיצה:



5. א. $x > -\frac{1}{3}$ ב. (i). $(0.132, 0)$

ב. $a = 2.13$ ג. $0.132 < x < 0.93$

בגרות קיץ 2014 מועד ג':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) נתונה המשוואה $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 16}$, a הוא פרמטר חיובי שונה מ-4.

א. מצא עבור אילו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה.

אליפסה שמשוואתה $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 16}$ חותכת את הקרן השלילית של ציר ה- y בנקודה A.

F_1 הוא המוקד הימני של האליפסה, ו- F_2 הוא המוקד השמאלי.

הישר AF_1 יוצר עם הקרן החיובית של ציר ה- x זווית של 26.566° .

ב. מצא את משוואת האליפסה.

ג. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של נקודות הנמצאות במרחקים שווים

מהמוקד F_1 ומן הישר שעובר דרך המוקד F_2 ומקביל לציר ה- y . נמק.

(2) בפירמידה משולשת ABCD, AF הוא גובה הפירמידה לפאה BDC,

ו-CH הוא גובה הפירמידה לפאה ABD.

הישרים AF ו-CH נפגשים בנקודה P (ראה ציור).

א. ענה על הסעיפים הבאים:

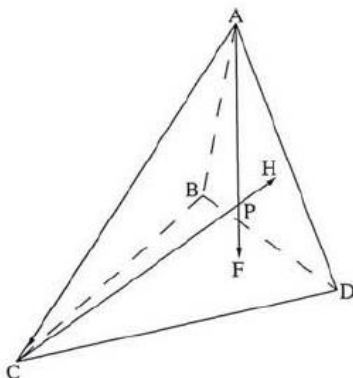
i. הסבר מדוע $\vec{AP} \cdot \vec{BD} = 0$.

ii. הוכח כי $\vec{AC} \perp \vec{BD}$.

ב. הוכח כי $\vec{AH} \perp \vec{BD}$.

ג. סמן $\vec{BA} = \underline{w}$, $\vec{BC} = \underline{v}$, $\vec{BD} = \underline{u}$.

הוכח כי אם $AB = BC$ אז $\angle CBD = \angle ABD$.



(3) נתון המספר המרוכב $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, ונתון מספר מרוכב w שהערך המוחלט שלו הוא r ($r > 0$). z ו- w נמצאים ברביע הראשון.

המספר z מקיים: $z = \frac{w}{\bar{w}}$.

א. הבע באמצעות α ו- r את המספר w , את הצמוד שלו $\bar{w}$, ואת ההופכי שלו $\frac{1}{w}$.

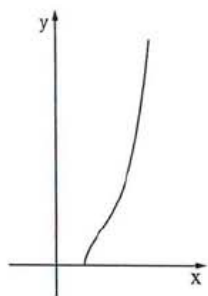
ב. סרטט במערכת צירים את מעגל היחידה, והוסף לסרטוט דוגמה של מספר w ושל ההופכי שלו $\frac{1}{w}$, עבור $r > 1$.

ג. נתונה סדרה הנדסית a_n שבה $a_1 = \frac{1}{w}$, $a_2 = z$. הבע באמצעות α ו- r את a_5 .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)

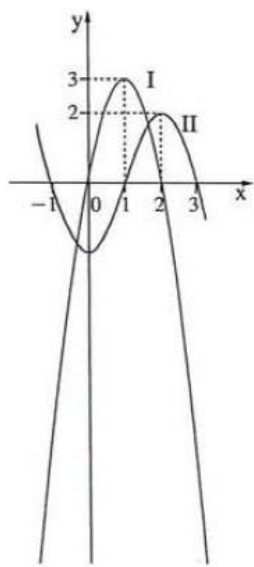
ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{2x-1} \cdot e^{x^2-x}$ (ראה ציור).

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הוכח כי הפונקציה עולה לכל x בתחום ההגדרה שלה.
- ג. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$. הישר נפגש עם גרף הפונקציה בשתי נקודות בלבד.
 - i. מצא את משוואת המשיק.
 - ii. העתק למחברתך את גרף הפונקציה, והוסף לגרף סרטוט של המשיק.
 - iii. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה ועל ידי המשיק מסתובב סביב ציר ה- x . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



(5) בציור שלפניך מוצגים שני גרפים I ו-II של פונקציות המוגדרות

בתחום: $-1.1 \leq x \leq 3.1$. אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$

והאחר הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א. קבע איזה מבין הגרפים I ו-II הוא של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$.

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ii. מה הן האסימפטוטות של $g(x)$ המאונכות לציר ה- x ?

iii. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון הפנימיות

של $g(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

iv. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם נתון כי הישר $y=1$

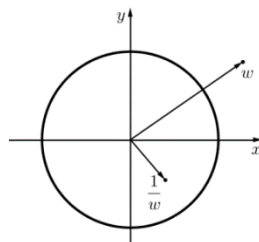
חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשלוש נקודות.

תשובות סופיות:

(1) א. $a > 4$ ב. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ ג. $y^2 = 16x$

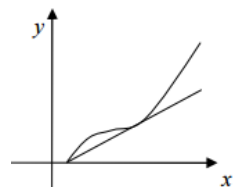
(2) א. (i). הסבר. א. (ii). הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

(3) א. $w = 0.5\alpha$, $\bar{w} = r \operatorname{cis}(-0.5\alpha)$, $\frac{1}{w} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-0.5\alpha)$ ג. $a_5 = r^3 \operatorname{cis}(5.5\alpha)$



ב. להלן סקיצה:

(4) א. $x \geq 0.5$ ב. הוכחה. ג. (i). $y = 2x - 1$ ג. (ii). להלן סקיצה:



(5) א. גרף II ב. (i). $-1.1 \leq x \leq -1$, $1 < x < 3$

ב. (ii). $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ ב. (iii). $\max(2, \ln 2)$

ב. (iv). עלייה: $1 < x < 2$, ירידה: $2 < x < 3$, $-1.1 < x < -1$.

ב. (v). להלן סקיצה:

